课前预读：

《费曼物理学讲义》I ：Chpt.20-3

《新概念物理教程：力学》：第四章第 6 节

第 21 讲，陀螺

暂参见费曼物理学讲义 1，Chpt 20-3

第 22 讲：静力学平衡

静力学平衡是只一个力学体系各部分都保持静止的状态。或者说体系的总动能为零

$$T_{tot}=0$$

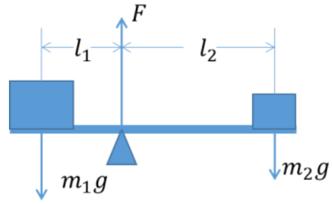
经常也会遇到其他的平衡模式，比如一条稳定流速不变的河流，也可以称为平衡，但这种平衡是动态的。

一个体系要处于静力学平衡状态，首先其初态是体系各部分速度为零，或总动能为零；其次体系的受力状态是使得体系的运动状态不发生改变。对于质点来说就是合力为零。而对于一个刚体来说，其运动可以分解成质心的运动和相对于质心的转动

$$M\frac{d\vec{v}_c}{dt}=\sum_i \vec{F}_i^{(e)} \qquad M\frac{d\vec{L}_c}{dt}=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i^{(e)}$$

因此刚体的质心无加速度，体系也无相对于质心的转动就是体系是处于平衡的基本条件了。也就是体系受到的合外力和合外力矩为零

$$\vec{F}^{(e)}=0 \qquad \vec{\tau}^{(e)}=0$$



例如如图所示的杠杆体系，两个质量分别为m_1,m_2的重物放在一个轻质杠杆的两边，位置分别在距离支点l_1,l_2的地方。如果体系要达到平衡，则合力为零为

$$F-m_1g-m_2g=0$$

合力矩为零为

$$m_1gl_1-m_2gl_2=0$$

需要注意的是这些平衡条件只能保证体系没有质心加速度和转动角加速度，不能保证体系一定处于静止状态。因此要判断一个体系处于静止，除了平衡条件外还

需要知道初始状态。

除了从力和力矩的角度来讨论平衡之外，还经常从能量的角度来进行讨论。对于机械能守恒的体系，其机械能为

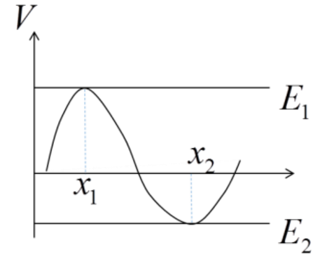
$$E = T + V = constant$$

在平衡态动能为零$T = 0$，而要体系维持在动能为零的情况下，只有势能是极值点的情况，也就是说要满足

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

这里的x可以是各类可能的参数或坐标。对于不同的参数，上式可能代表不同的物理意义。例如对于弹簧，其势能为$V = \frac{1}{2}kx^2$，其变化率$\frac{dV}{dx} = kx$对应于弹力；而对于单摆，其势能为$V = -mglcos\theta$，其变化率$\frac{dV}{d\theta} = mglsin\theta$对应于力矩。因此势能的变化率为零涵盖了合力为零、合力矩为零的情况。在更广泛的物理体系中，它还会有其他的物理意义。所以用能量来讨论物理体系的平衡有更一般的适应性。

势能的变化率为零这一条件给出了体系的平衡点，但同样是平衡，还会有不同的其他特性。比如在碗底放一个滚珠，它可以达到平衡，如果对这个滚珠施加微扰，把它拨离平衡位置少许，它仅会在平衡位置附近运动，不会跑的更远。而如果把滚珠放在倒扣的半球体顶端，它也能达到平衡，但是少许的微扰就会使得滚珠从球面上滚下去，不再回来。也就是说有不同的平衡状态，前一种被称为稳定平衡，而后一种被称为不稳定平衡。

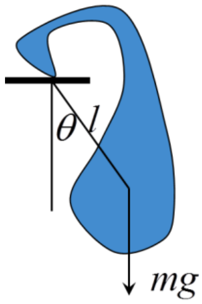


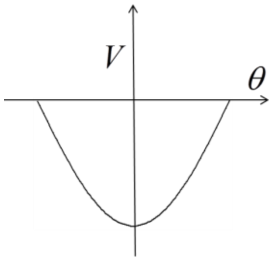
从能量的角度来说，稳定平衡对应于势能的极小值，如图中的x_2点。当体系能量为E_2时，体系达到了平衡。当施加微扰后体系的能量略有增加，于是具有了动能，但此时的体系是处于束缚态之中，只能在x_2点附近有限的空间中运动，属于稳定平衡。当体系能量为E_1时，可以看到x_1是平衡点，但当施加微扰后，体系能量增加变成自由态，因此体系将远离平衡态。

下图是稳定平衡的一个例子，一个如图形状的刚体靠一个支点悬挂起来。其势能为

$$V = -mglcos\theta$$

从势能图里看到当θ为零时势能极小，为稳定平衡点

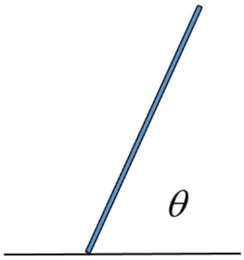


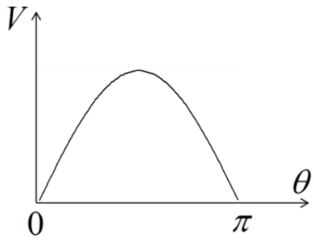


下图则为不稳定平衡的一个例子，一根细棍竖直放置在地面上。其势能为

$$V = \frac{1}{2} mglsin\theta$$

当θ为$\pi/2$时势能极大，为不稳定平衡点

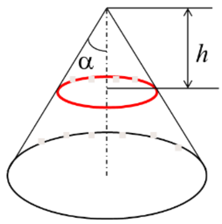




对于类似这两个例子的物理体系，可以看到其质心在平衡点和非平衡点的相对位置决定了体系的稳定性。若非平衡点处质心的位置高于平衡点质心位置则为稳定平衡，反之则为非稳定平衡，这也是因为质心位置的高低决定了重力势能大小的缘故。常见的玩具不倒翁就是调整了玩具中的质量分布，使得不倒翁倾斜时质心位置变高，从而其平衡成为稳定平衡。

势能极小作为平衡条件在许多复杂的物理体系中会使得处理问题变得相对简单。比如在讨论一根两端固定的绳子或者一座吊桥的形状，亦或是一个肥皂泡的形状这样的问题时，从力的平衡来进行分析会非常复杂。而从能量的角度来看就简化了。在数学上这对应着如何计算所谓泛函极小的问题。

【例】如图所示，一弹性系数为k，原长l，质量为m的均匀弹簧套在一个半顶角为α的光滑圆锥体上，平衡时其位置距离圆锥体的顶端的高度差h是多少？



这一问题从受力分析的角度看比较复杂，从能量角度处理就简单的多。该体系有两个势能： 弹簧的重力势能和弹性势能。当高度差为时h，以椎体的顶端为势能零点，重力势能为

$$V_g = -mgh$$

此时弹簧的弹性势能为

$$V_s = \frac{1}{2}k(2\pi h \tan\alpha - l)^2$$

平衡条件为

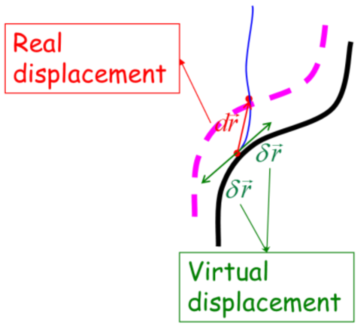
$$\frac{dV}{dh} = \frac{d(V_g + V_s)}{dh} = -mg + k(2\pi h \tan\alpha - l)2\pi \tan\alpha = 0$$

则

$$h = \frac{1}{2\pi \tan\alpha}\left(l + \frac{mg}{2\pi k \tan\alpha}\right)$$

虚功原理

另外一种常用来计算平衡问题的方法称为**虚功原理**。对于一个受束缚的体系，在某一个时刻，假设此时体系在束缚的约束下不花费时间可以做一个微小的位移的话，则称此位移为**虚位移**。例如右图所示，一个质点被约束在一个弯曲的曲面上运动，而曲面本身也在做着某种运动。在某个时刻，曲面处于图示实线位置，*dt* 之后曲面处于图示虚线位置，而此时质点沿曲面移动到另外一点。那么图中的$d\vec{r}$为实际位移。而虚位移是假设曲面保持实线位置不动，让质点在束缚下做一个位移，由于质点是被束缚在曲面上的，因此它可以沿曲面向上，也可以沿曲面向下，那么图示中的两个$\delta\vec{r}$都可以是虚位移。可以看到虚位移和实际位移是不一样的。如果计算一下力在虚位移下做的功，则称为**虚功**



$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$$

虚功不是力真实做的功，只是一种假想的功。在很多时候约束力所做的总虚功为零，这种约束被称为**理想约束**

$$\sum_i \vec{F}_{constraint_i} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

理想约束是常见的，比如在约束在一个光滑斜面上，约束力是和斜面垂直的，也就是和虚位移垂直的，因此其虚功为零。

将质点受到的力分为约束力$\vec{F}_{ci}$和其他的力$\vec{F}_i$，则总虚功为

$$\delta W=\sum_i(\vec{F}_i+\vec{F}_{ci})\cdot\delta\vec{r}_i$$

如果约束是理想约束，则

$$\sum_i\vec{F}_{ci}\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

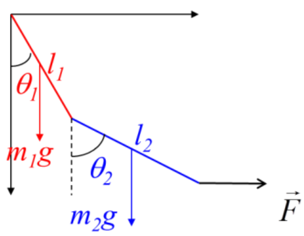
当体系处于平衡时，其中每一个质点受到的合力都为零，也就是

$$\vec{F}_i+\vec{F}_{ci}=0$$

那么总虚功自然为零，在利用理想约束所满足的方程，于是可以得到静力学平衡条件

$$\sum_i\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

也就是说理想约束下，非约束力的总虚功为零就是体系的平衡条件。这就是虚功原理。虚功原理的优势在于可以不用考虑体系的约束力，在很多时候体系的约束力事先并不知道其大小，因此回避了约束力会给计算带来很大便利。



【例】如图所示，一长度为l_1质量为m_1的硬杆一端悬挂在可光滑转动的固定点，另一端连接在一长度为l_2质量为m_2的硬杆上，两杆之间也可以光滑转动。在第二根杆的另外一个端点施加一水平方向的力$\vec{F}$，则当体系平衡时，两杆与竖直方向的夹角θ_1,θ_2分别是多少？

利用虚功原理可得平衡条件为

$$m_1\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_1+m_2\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_2+\vec{F}\cdot\delta\vec{r}_3=0$$

其中$\delta\vec{r}_1$，$\delta\vec{r}_2$，$\delta\vec{r}_3$分别为三个着力点的位移，着力点的坐标分别为

$$\vec{r}_1=\frac{l_1}{2}\sin\theta_1\vec{\imath}+\frac{l_1}{2}\cos\theta_1\vec{\jmath}$$

$$\vec{r}_2=l_1\sin\theta_1\vec{\imath}+l_1\cos\theta_1\vec{\jmath}+\frac{l_2}{2}\sin\theta_2\vec{\imath}+\frac{l_2}{2}\cos\theta_2\vec{\jmath}$$

$$\vec{r}_3=l_1\sin\theta_1\vec{\imath}+l_1\cos\theta_1\vec{\jmath}+l_2\sin\theta_2\vec{\imath}+l_1\cos\theta_2\vec{\jmath}$$

则虚位移分别为

$$\delta\vec{r}_1=-\frac{l_1}{2}\cos\theta_1\,\delta\theta_1\vec{\imath}+\frac{l_1}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1\vec{\jmath}$$

$$\delta\vec{r}_2 = -l_1\cos\theta_1\,\delta\theta_1\vec{\imath} + l_1\sin\theta_1\delta\theta_1\,\vec{\jmath} - \frac{l_2}{2}\cos\theta_2\,\delta\theta_2\vec{\imath} + \frac{l_2}{2}\sin\theta_2\delta\theta_2\,\vec{\jmath}$$

$$\delta\vec{r}_3 = -l_1\cos\theta_1\,\delta\theta_1\vec{\imath} + l_1\sin\theta_1\delta\theta_1\,\vec{\jmath} - l_2\cos\theta_2\,\delta\theta_2\vec{\imath} + l_2\sin\theta_2\delta\theta_2\,\vec{\jmath}$$

注意到

$$\vec{g} = g\vec{\jmath} \qquad \vec{F} = F\vec{\imath}$$

则虚功为

$$\delta W = \left(-\frac{m_1gl_1}{2}sin\theta_1 - m_2gl_1sin\theta_1 + Fl_1cos\theta_1\right)\delta\theta_1 + \left(Fl_2cos\theta_2 - \frac{m_2gl_2}{2}sin\theta_2\right)\delta\theta_2$$

由于虚位移$\delta\theta_1$，$\delta\theta_2$ 是体系在满足约束下的位移，这两个虚位移之间是相互独立的，其大小也是任意的，因此欲满足虚功为零$\delta W = 0$，只有

$$-\frac{m_1gl_1}{2}sin\theta_1 - m_2gl_1sin\theta_1 + Fl_1cos\theta_1 = 0$$

$$Fl_2cos\theta_2 - \frac{m_2gl_2}{2}sin\theta_2 = 0$$

解得

$$\tan\theta_1 = \frac{2F}{(m_1 + 2m_2)g}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{2F}{m_2g}$$